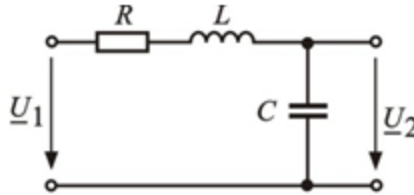


Schaltungsanalyse von RLC-Hoch- und -Tiefpassschaltungen

=> Filterschaltungen 2. Ordnung

Tiefpass 2. Ordnung



$$G(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R + (j \cdot \omega)^2 \cdot L \cdot C} = \frac{1}{1 - (\omega)^2 \cdot L \cdot C + j \cdot \omega \cdot C \cdot R}$$

$$G(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_1}} \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{1}{R \cdot C} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Amplitudenfrequenzgang in Dezibel

$$A(\omega) = 20 \cdot \lg(|G(\omega)|) = 20 \cdot \lg \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_1}} \right] = 20 \cdot \lg \left[\frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}} \right]$$

$$A(\omega) = -10 \cdot \lg \left[\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 \right]$$

stückweise lineare Näherung für $\omega_1 = \omega_2 = \omega_g$

$$A(\omega) \approx \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \ll \omega_g \\ -10 \cdot \lg \left(\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^4 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 \right) & \text{für } \omega \gg \omega_g \end{cases}$$

$$A(\omega) \approx \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \ll \omega_g \\ -40 \cdot \lg \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right) & \text{für } \omega \gg \omega_g \end{cases}$$

(da die 2. Potenz des frequenzabhängigen Terms viel kleiner als dessen 4. Potenz ist.)

Phasenfrequenzgang

$$\phi(\omega) = \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(G(\omega))}{\operatorname{Re}(G(\omega))}\right) \quad \text{gilt nur für } \operatorname{Re}(G(\omega)) \geq 0, \text{ da atan nur Werte im Winkelbereich}$$

$$\frac{-\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \quad \text{zurück gibt.}$$

Dies entspricht der rechten Halbebene der Gaußschen Zahlenebene.

Für die Analyse von Filtern 2. und höherer Ordnung wird jedoch die gesamte Gaußsche Zahlenebene benötigt.

Diese Erweiterung auf die gesamte Gaußschen Zahlenebene ist in der Berechnungsvorschrift $\arg(G(\omega))$ enthalten.

Diese gibt Werte im Winkelbereich $-\pi < \phi < \pi$ zurück.

$$\phi(\omega) = \arg(G(\omega))$$

Für die analytische Analyse entspricht dies der folgenden Erweiterung der atan-Funktion:

$$G_k(\omega) = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(G(\omega))}{\operatorname{Re}(G(\omega))}\right) & \text{if } \operatorname{Re}(G(\omega)) \geq 0 \wedge \operatorname{Im}(G(\omega)) \geq 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(G(\omega))}{\operatorname{Re}(G(\omega))}\right) + \pi & \text{if } \operatorname{Re}(G(\omega)) < 0 \wedge \operatorname{Im}(G(\omega)) \geq 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(G(\omega))}{\operatorname{Re}(G(\omega))}\right) & \text{if } \operatorname{Re}(G(\omega)) \geq 0 \wedge \operatorname{Im}(G(\omega)) < 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(G(\omega))}{\operatorname{Re}(G(\omega))}\right) - \pi & \text{if } \operatorname{Re}(G(\omega)) < 0 \wedge \operatorname{Im}(G(\omega)) < 0 \end{cases}$$

normierte grafische Darstellung des Verhaltens

mit $\omega_1 := 1$ $\omega_2 := 1$

$$G(\omega) := \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

$$A(\omega) := 20 \cdot \log(|G(\omega)|)$$

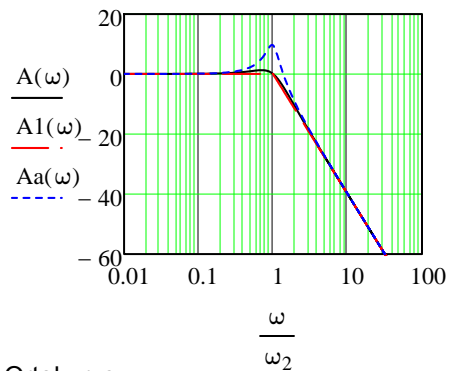
$$A1(\omega) := \left(\begin{array}{l} 0 \text{ if } \omega < \omega_2 \\ -40 \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) \text{ if } \omega \geq \omega_2 \end{array} \right)$$

$$\phi(\omega) := \arg(G(\omega))$$

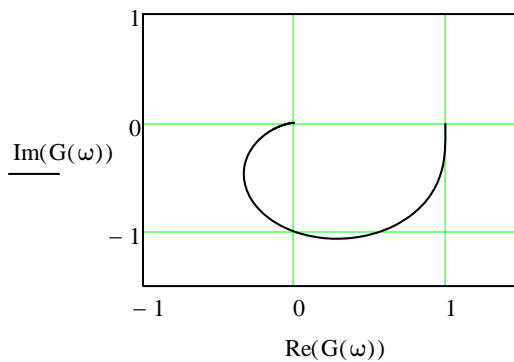
Umrechnung von Bogenmaß in Grad:

$$\phi1(\omega) := \frac{\phi(\omega)}{\pi} \cdot 180 \quad \phi1(\omega_2) = -90$$

Amplitudengang in Dezibel



Ortskurve:



im Bereich

$\omega := 0.01, 0.02 \dots 100$

alternativ mit

$\omega_{1a} := 3$ $\omega_2 := 1$

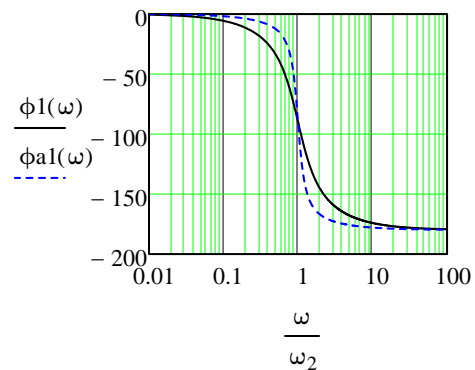
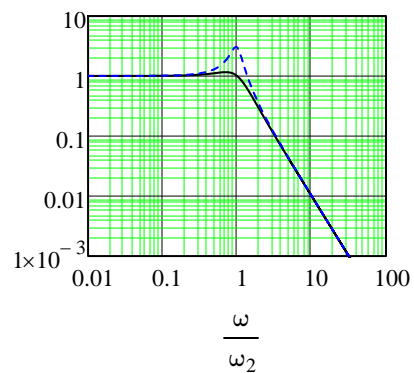
$$Ga(\omega) := \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1a}} - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

$$Aa(\omega) := 20 \cdot \log(|Ga(\omega)|)$$

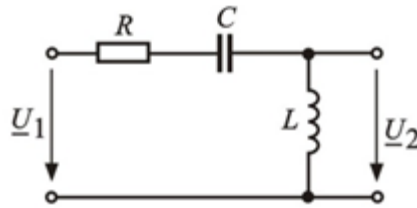
$$\phi a(\omega) := \arg(Ga(\omega))$$

$$\phi a1(\omega) := \frac{\phi a(\omega)}{\pi} \cdot 180$$

Bodediagramm:



Hochpass 2. Ordnung



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{j \cdot \omega \cdot L}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} + j \cdot \omega \cdot L} = \frac{1}{1 + \frac{R}{j \cdot \omega \cdot L} + \frac{1}{[(j \cdot \omega)^2 \cdot (C \cdot L)]}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{j \cdot \frac{\omega}{\omega_1}} + \frac{1}{\left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_2} \right)^2} \right]}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega^2} \right) - j \cdot \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)} \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{R}{L} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Amplitudenfrequenzgang in Dezibel

$$A(\omega) = 20 \cdot \lg(|G(\omega)|) = 20 \cdot \lg \left[\frac{1}{\left| 1 - \frac{\omega_2^2}{\omega^2} - j \cdot \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \right|} \right] = 20 \cdot \lg \left[\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2}} \right]$$

$$A(\omega) = -10 \cdot \lg \left[\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \right]$$

stückweise lineare Näherung für $\omega_1 = \omega_2 = \omega_g$

$$A(\omega) \approx \begin{cases} -10 \cdot \lg \left(\left(\frac{\omega_g}{\omega} \right)^4 + \left(\frac{\omega_g}{\omega} \right)^2 \right) & \text{für } \omega \ll \omega_g \\ 0 & \text{für } \omega \gg \omega_g \end{cases}$$

$$A(\omega) \approx \begin{cases} -40 \cdot \lg \left(\frac{\omega_g}{\omega} \right) & \text{für } \omega \ll \omega_g \\ 0 & \text{für } \omega \gg \omega_g \end{cases}$$

normierte grafische Darstellung des Verhaltens im Bereich $\omega := 0.01, 0.02 \dots 100$

mit $\omega_1 := 1 \quad \omega_2 := 1$

alternativ mit $\omega_{1a} := 3 \quad \omega_2 := 1$

$$G(\omega) := \frac{1}{1 + \frac{1}{j \cdot \frac{\omega}{\omega_1}} + \frac{1}{\left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}$$

$$Ga(\omega) := \frac{1}{1 + \frac{1}{j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1a}}} + \frac{1}{\left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}$$

$$A(\omega) := 20 \cdot \log(|G(\omega)|) \quad A(\omega_2) = 0$$

$$Aa(\omega) := 20 \cdot \log(|Ga(\omega)|)$$

$$A1(\omega) := \begin{cases} -40 \cdot \log\left(\frac{\omega_2}{\omega}\right) & \text{if } \omega < \omega_2 \\ 0 & \text{if } \omega \geq \omega_2 \end{cases}$$

$$\phi(\omega) := \arg(G(\omega))$$

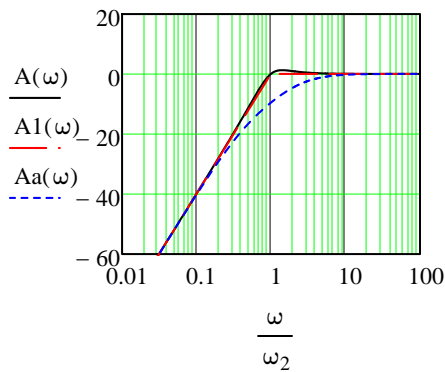
$$\phi a(\omega) := \arg(Ga(\omega))$$

Umrechnung von Bogenmaß in Grad:

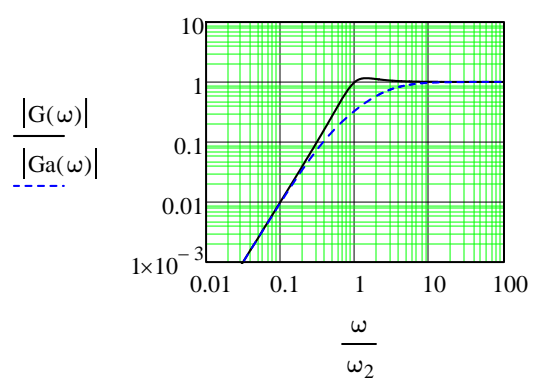
$$\phi 1(\omega) := \frac{\phi(\omega)}{\pi} \cdot 180 \quad \phi 1(\omega_2) = 90$$

$$\phi a 1(\omega) := \frac{\phi a(\omega)}{\pi} \cdot 180$$

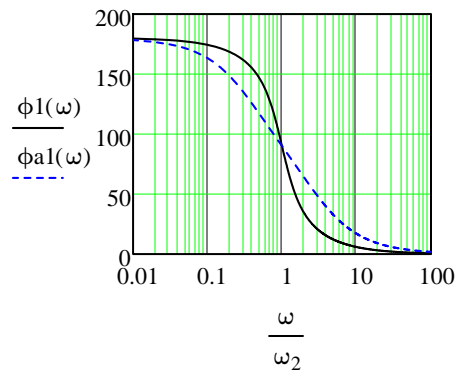
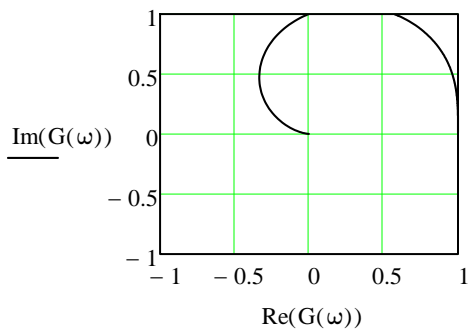
Amplitudenfrequenzgang in Dezibel



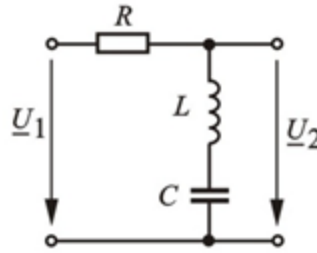
Bodediagramm:



Ortskurve:



Bandsperrre 2. Ordnung



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{1 + (j \cdot \omega)^2 \cdot L \cdot C}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R + (j \cdot \omega)^2 \cdot L \cdot C} = \frac{1 + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_1} + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)} \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{1}{R \cdot C} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

normierte grafische Darstellung des Verhaltens im Bereich $\omega := 0.01, 0.02 \dots 100$

mit $\omega_1 := 1$ $\omega_2 := 1$

alternativ mit $\omega_{1a} := 3$ $\omega_2 := 1$

$$G(\omega) := \frac{1 + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_1} + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

$$Ga(\omega) := \frac{1 + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1a}} + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

$$A(\omega) := 20 \cdot \log(|G(\omega)|)$$

$$Aa(\omega) := 20 \cdot \log(|Ga(\omega)|)$$

$$\phi(\omega) := \arg(G(\omega))$$

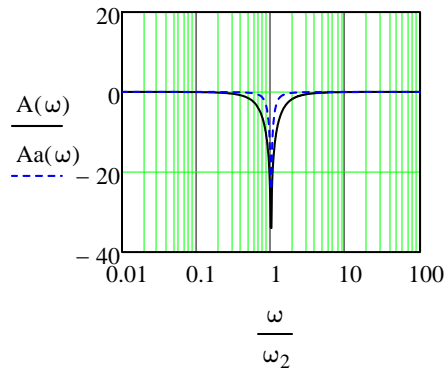
$$\phi a(\omega) := \arg(Ga(\omega))$$

Umrechnung von Bogenmaß in Grad:

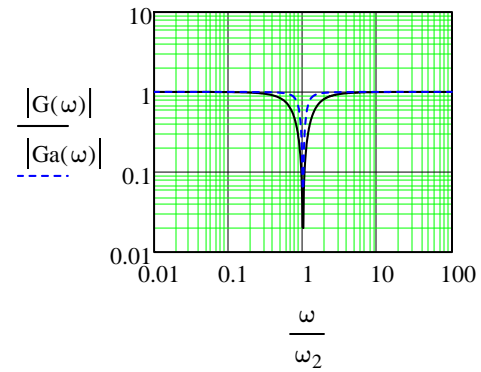
$$\phi 1(\omega) := \frac{\phi(\omega)}{\pi} \cdot 180$$

$$\phi a 1(\omega) := \frac{\phi a(\omega)}{\pi} \cdot 180$$

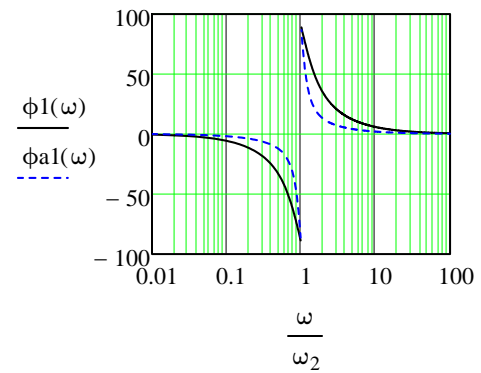
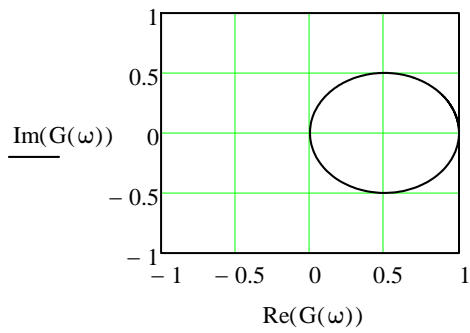
Amplitudenfrequenzgang in Dezibel



Bodediagramm:

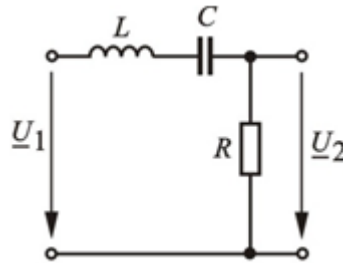


Ortskurve:



Im Bereich der Nullstelle des Amplitudenfrequenzgangs $A(\omega)$ weist der Phasenfrequenzgang $\phi(\omega)$ bzw. $\phi_1(\omega)$ einen Sprung von -90° nach $+90^\circ$ auf.

Bandpass 2. Ordnung



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{j \cdot \omega \cdot C \cdot R}{1 + j \cdot \omega \cdot C \cdot R + (j \cdot \omega)^2 \cdot L \cdot C} = \frac{j \cdot \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_1} + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{j \cdot \frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2} + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)} \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{1}{R \cdot C} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

normierte grafische Darstellung des Verhaltens im Bereich $\omega := 0.01, 0.02 \dots 100$

mit $\omega_1 := 1 \quad \omega_2 := 1$

$$G(\omega) := \frac{j \cdot \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_1} + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

$$A(\omega) := 20 \cdot \log(|G(\omega)|)$$

$$\phi(\omega) := \arg(G(\omega))$$

alternativ mit $\omega_{1a} := 3 \quad \omega_2 := 1$

$$G_a(\omega) := \frac{j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1a}}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_{1a}} + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

$$A_a(\omega) := 20 \cdot \log(|G_a(\omega)|)$$

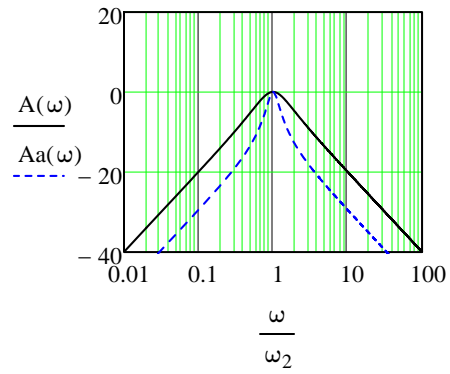
$$\phi_a(\omega) := \arg(G_a(\omega))$$

Umrechnung von Bogenmaß in Grad:

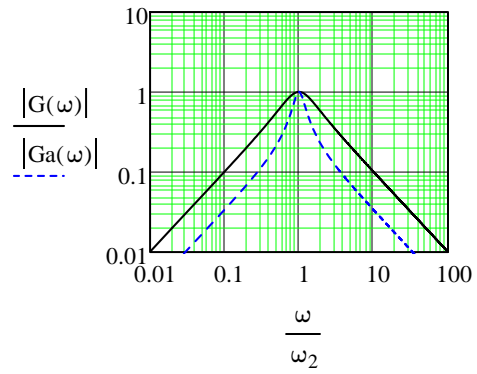
$$\phi_1(\omega) := \frac{\phi(\omega)}{\pi} \cdot 180$$

$$\phi_{a1}(\omega) := \frac{\phi_a(\omega)}{\pi} \cdot 180$$

Amplitudenfrequenzgang in Dezibel



Bodediagramm:



Ortskurve:

